Probabilité (Niveau 3A - Objectif EMLyon-EDHEC)

On lance indéfiniment une pièce donnant *"Pile"* avec la probabilité p et *"Face"* avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que $p \in]0,1[$ et on admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{ième}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k-1)^{ième}$ lancer.

On note P_k (resp. F_k) l'événement : *"on obtient Pile (resp. Face) au $k^{ième}$ lancer"*.

Pour ne pas surcharger l'écriture on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

Partie 1 : étude de quelques exemples.

1. Donner la loi de X_2.
2. (a) Donner la loi de X_3.
   (b) Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
3. (a) Trouver la loi de X_4.
   (b) Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : étude du cas $p \neq q$. Dans cette partie, $n \geq 2$

1. Exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de p, q et n.
2. En décomposant l'événement $(X_n = 1)$ en une réunion d'événements incompatibles, montrer que $P(X_n = 1) = \dfrac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right)$.
3. En distinguant les cas n pair et n impair, exprimer $P(X_n = n-1)$ en fonction de p et q.
4. Retrouver, grâce aux trois questions précédentes, les lois de X_3 et X_4.
5. Pour tout entier naturel k, supérieur ou égal à 2, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{ième}$ lancer est un changement et 0 sinon (Z_k est donc une variable de Bernouilli).
   Écrire X_n à l'aide de certaines des variables Z_k et en déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : étude du cas $p = q$.

1. Vérifier, en utilisant les résultats de la partie 1, que X_3 et X_4 suivent chacune une loi binômiale.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, X_n suit une loi binômiale dont on donnera les paramètres.